Алгоритмы обработки данных с МЭМС-датчиков в ИС

Некоторые особенности цифрового Фурье-анализа

Соловьев А. В.

ПетрГУ – КИИСиФЭ

(Rev. 2016 07 09)

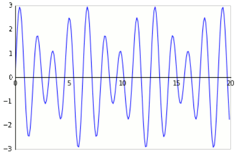
Преобразование Фурье

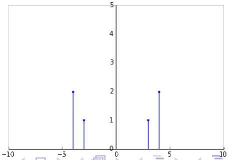
Сигнал может быть описан в пространстве времени функцией $f(x)$ либо в пространстве частот её Фурье-образом $\hat{f}(w)$:

$$\hat{f}(w) = \mathfrak{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\hat{f}(w)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

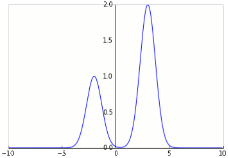
Описание сигнала в пространстве частот означает, что он представляется суммой гармонических колебаний.

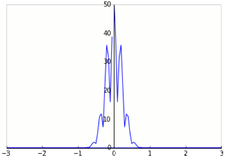


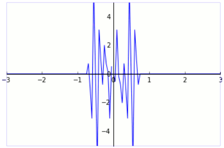


Некоторые свойства Фурье-преобразования

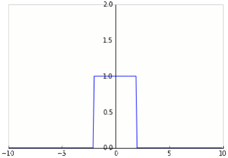
- Ф.О. – комплексная функция ($a + \mathrm{i}b = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$)
- Для вещественного оригинала: модуль образа – чётная функция, фаза образа – нечётная функция

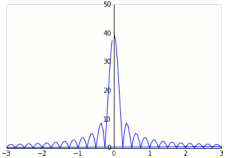






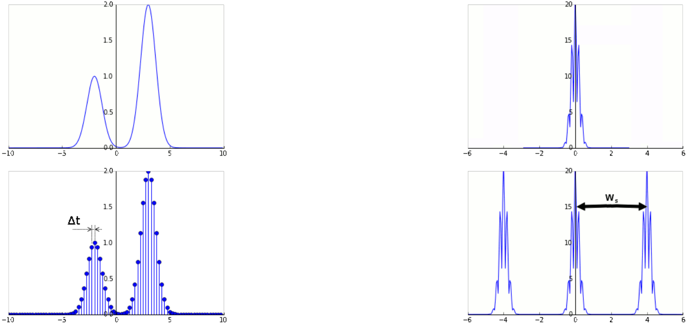
- Для оригинала, ограниченного по времени, образ не ограничен по частоте («бесконечный»)





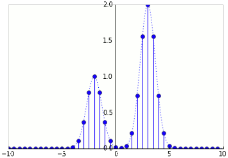
Ф.О. дискретного сигнала

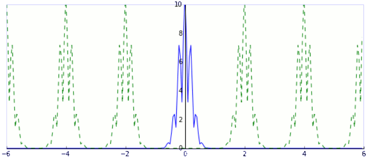
Для дискретного сигнала Фурье-изображение является периодической функцией с периодом $w_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$, равной (с точностью до множителя) бесконечной сумме копий Ф.О. аналогового сигнала, сдвинутых друг относительно друга на частоту дискретизации w_s.



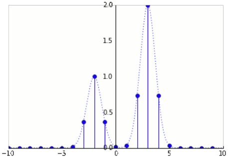
Алиасинг

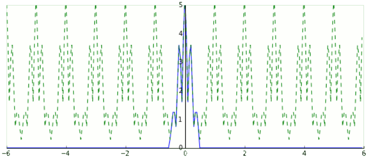
Восстановление Ф.О. сигнала по дискретной последовательности возможно только если $w_s \geqslant 2w_{hi}$:





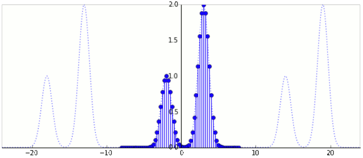
В противном случае наблюдается искажение, называемое *алиасингом* (aliasing).

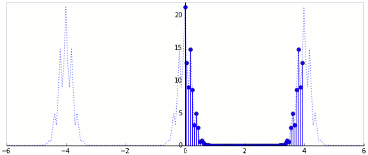




ДПФ дискретного сигнала

ДПФ определено для периодической последовательности. При применении ДПФ к конечной последовательности длины N отсчётов, считается, что она представляет собой один период периодической последовательности с периодом N отсчётов.





Значения ДПФ соответствуют отсчётам непрерывного Ф.О. (с точностью до множителя) дискретной последовательности на периоде w_s с интервалом Δw при соблюдении условий теоремы Котельникова.

Теорема Котельникова

Во временной области: восстановление сигнала с финитным спектром ширины $2f_{hi}$ по его отсчётам возможно, если отсчёты следуют с шагом по времени не более $\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f_{hi}}$.

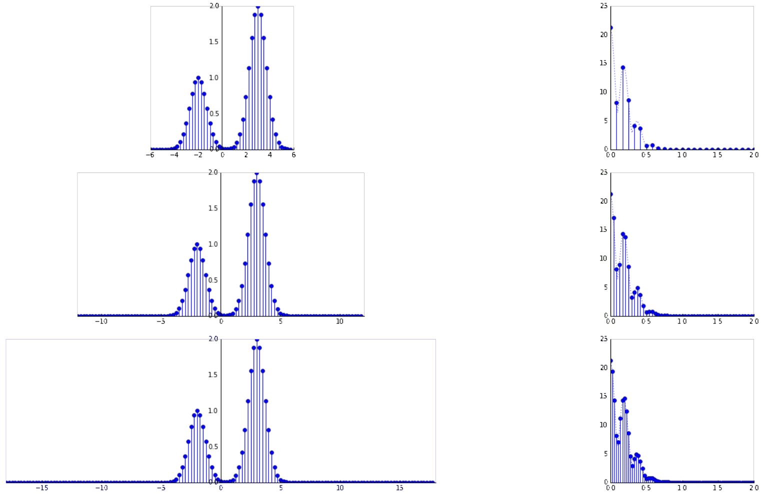
В частотной области: восстановление Ф.О. сигнала по его отсчётам ДПФ возможно для дискретного сигнала длительности $T = N\Delta t$ и шаге по частоте $\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}$

Следствие: разрешение по частоте в ДПФ зависит от длины последовательности:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

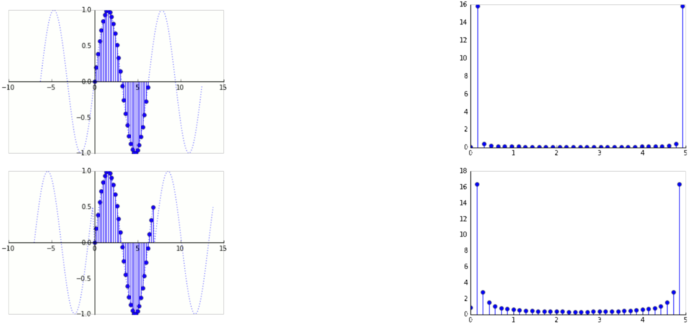
Для улучшения различения близко расположенных гармоник достаточно дополнить исходную последовательность нулями.

Разрешение по частоте



Растекание спектра

При вычислении ДПФ предполагается, что преобразуемый ряд – периодический, и обрабатываемая конечная последовательность представляет его 1 период. Если в этом ряду $\exists$ гармоника с частотой f_i (не кратная Δf), для которой на период ряда $N\Delta t$ укладывается нецелое число периодов этой гармоники, наблюдается *эффект растекания спектра*.



Для уменьшения эффекта применяют окна.