

Алгоритмы обработки данных с МЭМС-датчиков в ИС

Алгоритмы восстановления траектории и расчета
ориентации устройства

Соловьев А. В.

ПетрГУ – КИИСиФЭ

(Rev. 2016 07 09)

Определение вертикальных перемещений по показаниям барометра

Барометрическая формула для идеального газа:

$$p = p_0 \exp\left(-Mg \frac{h - h_0}{RT}\right) \rightarrow h - h_0 = -\frac{RT}{Mg} \ln \frac{p}{p_0} \quad (1)$$

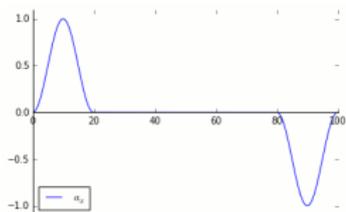
На практике применима следующая формула:

$$\Delta h = 18400(1 + \alpha t) \lg \frac{p_0}{p}, \quad (2)$$

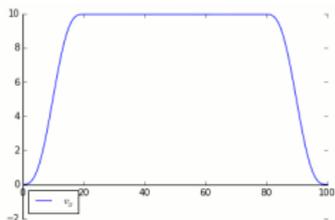
где α – температурный коэффициент объёмного расширения воздуха (0.003665 1/°C), t – температура (°C).

Поскольку атмосферное давление зависит от погоды, интервал времени между измерениями должен быть небольшим, а точки измерения располагаться не слишком далеко друг от друга.

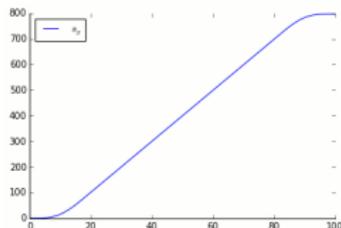
Вычисление пройденного пути по осциллограмме акселерометра (методом интегрирования)



$$a_x(t)$$



$$v_x(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$$



$$s_x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

Такого рода расчёты возможны, если ориентация устройства не меняется. В начальный момент времени (в неподвижном состоянии) необходимо определить направление вектора силы тяжести и вычитать \vec{g} из показаний акселерометра.

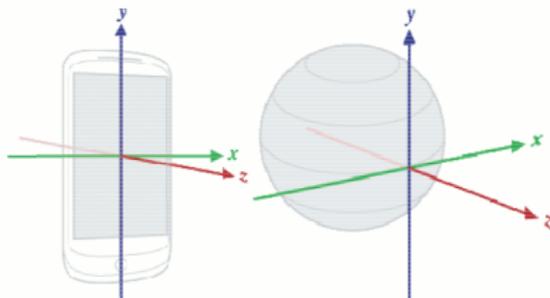
Для сложного движения под влиянием центробежной силы из-за вращения устройства, линейного ускорения и ускорения силы тяжести такой подход неприемлем.

Способы представления ориентации устройства

Выбор системы координат

Для определения ориентации устройства, необходимо координатные оси устройства сопоставить с положением относительно глобальных координат.

Наиболее популярный выбор направления осей в глобальной системе координат: ось Z – противоположна силе тяжести, ось Y – на магнитный север, ось X – на восток.



Для определения направления на магнитный север и вектора силы тяжести используются показания магнитометра и акселерометра.

Углы Эйлера (1): классические

Начальная СК – (xyz) , конечная – (XYZ) . Существует 12 вариантов из трёх поворотов, как перейти от (xyz) к (XYZ) .

Например, Z-X-Z:

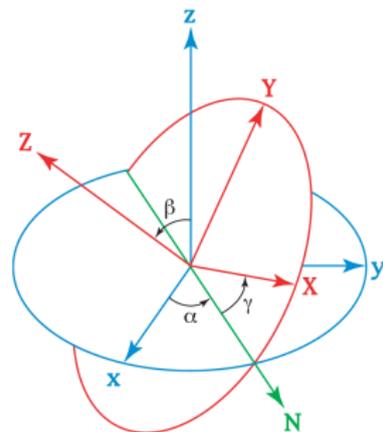
Пересечение «старой» плоскости $(0xy)$ с «новой» плоскостью $(0XY)$ обозначено вектором \vec{N} и называется *линией узлов*.

1. Поворот вокруг оси z на *угол прецессии* α .

Ось z остаётся на месте, оси x и y вращаются в синей плоскости на α , ось x становится сонаправленной вектору \vec{N} .

2. Поворот вокруг «бывшей» оси x (вектора \vec{N}) на *угол нутации* β . Ось z становится на своё «новое» место Z . Ось y выходит из синей плоскости и переходит в красную.

3. Поворот вокруг «новой» оси Z на *угол собственного вращения* γ . Оси x и y становятся на свои «новые» места в красной плоскости – X и Y .

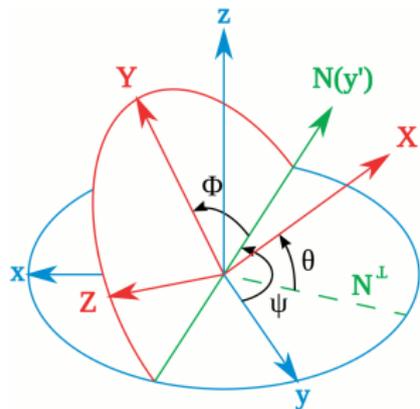


Углы Эйлера (2): углы Тэта – Брайена

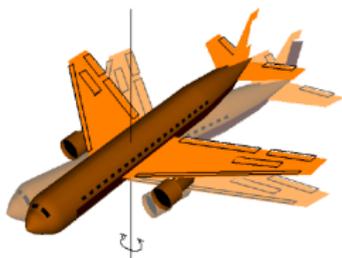
Например Z-Y-X (соответствует навигационным углам):

Линия узлов \vec{N} является пересечением плоскостей, составленных из разных «старых» и «новых осей». Здесь – $(0xy)$ и $(0YZ)$.

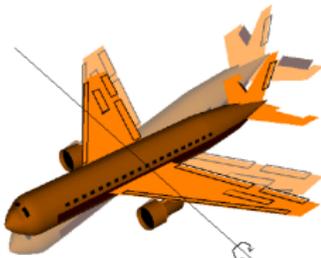
1. Поворот вокруг оси z на *угол рысканья* ψ (*yaw*). Ось z остаётся на месте, оси x и y вращаются в синей плоскости на α , ось y становится сонаправленной вектору \vec{N} .
2. Поворот вокруг «бывшей» оси y (вектора \vec{N}) на *угол тангажа* θ (*pitch*). Ось x становится на своё «новое» место X . Ось z переходит в красную плоскость.
3. Поворот вокруг «новой» оси X на *угол крена* ϕ (*roll*). Оси y и z становятся на свои «новые» места в красной плоскости – Y/Z .



Углы Эйлера (3): навигационные углы



рысканье (yaw)



тангаж (pitch)



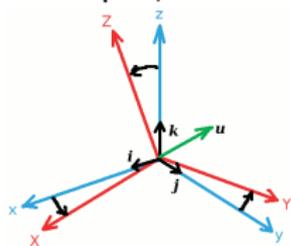
крен (roll)

-
- (+) Углы Эйлера имеют интуитивно понятное геометрическое представление.
 - (-) Сложно комбинировать два поворота.
 - (-) Сложно интерполировать две ориентации (находить промежуточные).
 - (-) Подвержены «складыванию рамок» (gimbal lock).

Матрица поворота

Матрица направляющих косинусов (DCM – Direction Cosine Matrix)

Начальная СК – (xyz) или $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, конечная – (XYZ) или $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
Преобразование может быть описано через углы между «старыми» и «новыми» единичными векторами при помощи следующей матрицы:



$$DCM = \begin{bmatrix} \cos(\vec{I}, \vec{i}) & \cos(\vec{I}, \vec{j}) & \cos(\vec{I}, \vec{k}) \\ \cos(\vec{J}, \vec{i}) & \cos(\vec{J}, \vec{j}) & \cos(\vec{J}, \vec{k}) \\ \cos(\vec{K}, \vec{i}) & \cos(\vec{K}, \vec{j}) & \cos(\vec{K}, \vec{k}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

- (+) Повороты комбинируются матричным перемножением их DCM.
- (+) Для применения поворота к вектору, он умножается на DCM:
 $\vec{u}' = DCM \cdot \vec{u}$

Кватернион (определение)

Кватернион – гиперкомплексное число:

$$\mathbf{q} = a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – вещественные числа; i, j, k – мнимые единицы.

Можно представить в виде вектора в 4-мерном пространстве (a, b, c, d) .

Операции над кватернионами:

- ▶ Умножение на скаляр: $k\mathbf{q} = (ka, kb, kc, kd)$.
- ▶ Сложение: $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$.
- ▶ Модуль: $|\mathbf{q}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
- ▶ Сопряжение: $\mathbf{q}^* = (a, -b, -c, -d)$.
- ▶ Обращение: $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2}$.
- ▶ Умножение Грассмана – (обычное). Некоммутативно!
- ▶ Скалярное произведение: $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$.
- ▶ Векторное произведение: $\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1}{2}$

Таблица умножения базисных кватернионов:

\times	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Кватернион вращения

Переход от «старой» к «новой» системе координат можно представить как вращение вокруг некоторого вектора $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ на угол φ . Это вращение можно описать при помощи кватерниона

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, u_x \sin \frac{\varphi}{2}, u_y \sin \frac{\varphi}{2}, u_z \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4)$$

Для применения поворота \mathbf{q} к вектору \vec{r} , выполняется следующая операция:

$$\vec{r}' = \mathbf{q} \vec{r} \mathbf{q}^{-1} \quad (5)$$

(+) Повороты комбинируются:

$$\vec{r}' = \mathbf{q}_2 (\mathbf{q}_1 \vec{r} \mathbf{q}_1^{-1}) \mathbf{q}_2^{-1} = (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1) \vec{r} (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1)^{-1}$$

(+) Вращения при помощи кватернионов можно интерполировать:

$$\mathbf{q} \approx \mathbf{q}_1 + t \mathbf{q}_2 \quad (\text{для малых углов})$$

(+) По сравнению с DCM обладают большей выч. устойчивостью.

Преобразования (1)

Расчёт матрицы поворота по углам Эйлера:

$$DCM_{ZYX} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Расчёт углов Эйлера по матрице поворота $DCM_{ZYX} = [M_{ij}]$:

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arctg} \frac{M_{21}}{M_{11}} \\ \theta &= -\operatorname{arcsin} M_{31} \\ \phi &= \operatorname{arctg} \frac{M_{32}}{M_{33}} \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразования (2)

Расчёт кватерниона вращения $\mathbf{q} = (q_0, q_i, q_j, q_k)$ по углам Эйлера:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= c_{\psi/2}c_{\theta/2}c_{\phi/2} + s_{\psi/2}s_{\theta/2}s_{\phi/2} \\
 q_i &= c_{\psi/2}c_{\theta/2}s_{\phi/2} - s_{\psi/2}s_{\theta/2}c_{\phi/2} \\
 q_j &= c_{\psi/2}s_{\theta/2}c_{\phi/2} + s_{\psi/2}c_{\theta/2}s_{\phi/2} \\
 q_k &= s_{\psi/2}c_{\theta/2}c_{\phi/2} - c_{\psi/2}s_{\theta/2}s_{\phi/2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Расчёт углов Эйлера по кватерниону вращения:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \operatorname{arctg} \frac{2(q_0q_k + q_iq_j)}{1 - 2(q_j^2 + q_k^2)} \\
 \theta &= \operatorname{arcsin} 2(q_0q_j - q_kq_i) \\
 \phi &= \operatorname{arctg} \frac{2(q_0q_i + q_jq_k)}{1 - 2(q_i^2 + q_j^2)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Преобразования (3)

Расчёт матрицы поворота по кватерниону $\mathbf{q} = (q_0, q_i, q_j, q_k)$:

$$DCM = \begin{bmatrix} 1 - 2q_j^2 - 2q_k^2 & 2(q_i q_j - q_k q_0) & 2(q_i q_k + q_j q_0) \\ 2(q_i q_j + q_k q_0) & 1 - 2q_i^2 - 2q_k^2 & 2(q_j q_k - q_i q_0) \\ 2(q_i q_k - q_j q_0) & 2(q_i q_0 + q_j q_k) & 1 - 2q_i^2 - 2q_j^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Расчёт кватерниона по матрице поворота $DCM = [M_{ij}]$:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + M_{11} + M_{22} + M_{33}} \\ q_i &= \frac{1}{4q_0} (M_{32} - M_{23}) \\ q_j &= \frac{1}{4q_0} (M_{13} - M_{31}) \\ q_k &= \frac{1}{4q_0} (M_{21} - M_{12}) \end{aligned} \quad (11)$$

Вычисление ориентации устройства

По показаниям гироскопа (w_x, w_y, w_z) рассчитываются углы поворота: $d\Theta_x = w_x dt$, $d\Theta_y = w_y dt$, $d\Theta_z = w_z dt$.

- ▶ Если рассчитывается матрица поворота:

$$DCM(t + dt) = DCM(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -d\Theta_z & d\Theta_y \\ d\Theta_z & 1 & -d\Theta_x \\ -d\Theta_y & d\Theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

- ▶ Если рассчитывается кватернион вращения:

$$\mathbf{q} = \left(1, \frac{d\Theta_x}{2}, \frac{d\Theta_y}{2}, \frac{d\Theta_z}{2}\right) \quad (13)$$